SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. BOVE

PARAMETRICI PER IL PROBLEMA DI CAUCHY PER EQUAZIONI FUCHSIANE

1 Marzo 1984

Il problema della esistenza e regolarità della soluzione di un problema di Cauchy (pdC) per equazioni di tipo Fuchs è stato studiato con vari metodi da molti autori (cfr. Baonendi-Goulaouic [1], N. Hanges [2], H. Tahara [3]). Vogliamo qui dare un'idea di come si possa costruire una parametrice a destra e a sinistra per un pdC del tipo seguente (cfr. lavoro in preparazione con J. Lewis e C. Parenti [4]).
Siano $m \in N$, $1 \leq k \leq m$; consideriamo ($D_{x_j} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$)

$$(0.1) \quad P(t,x,\partial_t,D_x) = t^k P_m(t,x,\partial_t,D_x) + t^{k-1} P_{m-1}(t,x,\partial_t,D_x) + \dots + P_{m-k}(t,x,\partial_t,D_x)$$

dove

i) $P_j(t,x,\partial_t,D_x) = \sum_{i=0}^{j} a_{j,i}(t,x,D_x)\,\partial_t^i$, $a_{j,i}$ operatori differenziali a coefficienti $C^\infty(\,]-T,T[\,\times\Omega)$, $T>0$, $\Omega \subset R^n$, omogenei di ordine $j-i$,

ii) $a_{m,m}(t,x) \equiv 1$

iii) Consideriamo il polinomio $C \ni \tau \to P_m(t,x,\tau,\xi) =$

$$= \sum_{i=0}^{m} a_{m,i}(t,x,\xi)\tau^i \quad , \quad t \in\,]-T,T[\quad , \quad (x,\xi) \in T^*\Omega \smallsetminus 0.$$ Supponiamo

che tale polinomio abbia sue radici distinte puramente immaginarie $\tau = \sqrt{-1}\,\lambda_r(t,x,\xi)$, $r = 1,\dots,m$, $\lambda_r \in C^\infty(]-T,T[\,\times (T^*\Omega \smallsetminus 0))$, reale e positivamente omogenea di grado 1. (Ipotesi di iperbolicità stretta di P_m).

iv) $(x,\xi) \in S^*\Omega$ consideriamo il polinomio (detto polinomio indiciale

di P):

$$I_p(x,\xi,\zeta) = \sum_{j=0}^{k} a_{m-j,m-j}(0,x,\xi)\ \zeta(\zeta-1)\dots(\zeta-(k-j)+1)\ ,\quad \zeta \in C.$$

Faremo l'ipotesi

$$(0.2)\qquad \forall (x,\xi) \in S^*\Omega\ ,\quad \forall \zeta \in Z_+\ ,\quad I_p(x,\xi;\zeta) \neq 0$$

Per P consideriamo il seguente pdC: sia $f \in C^\infty(\,]-T,T[\,;\ \mathcal{E}'(\Omega))$, $g_o,\dots, g_{m-k-1} \in \mathcal{E}'(\Omega)$, trovare $u \in C^\infty(\,]-T,\ T[\,;\ \mathcal{D}'(\Omega))$ tale che

$$(0.3)\qquad \begin{cases} Pu = f\ , & \text{in }\ ]-T,\ T[\ x\ \Omega\ , \\ \partial_t^j\ u|_{t=0} = g_j\ , & 0 \leqq j \leqq m-k-1\ ,\ \text{in } \Omega \end{cases}$$

La costruzione di una parametrice sinistra (destra) per il pdC (0.3) verrà fatta in vari passi:

i) riduzione al caso di "peso zero", ossia $k = m$

ii) trasformazione della equazione così ottenuta in un sistema di ordine $N = \frac{m(m+1)}{2} - 1$ equazioni, della forma

$$(0.4)\qquad t\partial_t\ \vec{u} = t\ A(t,x,D_x)\ \vec{u} + B(t,x,D_x)\ \vec{u} + \vec{f}$$

con A, B operatori pseudodifferenziali di ordine 1, o risp. del tipo precisato più sotto

iii) Detto P il sistema $t\partial_t - t\ A - B$ si costruisce un operatore di disaccoppiamento Q tale che

$$(0.5)\qquad PQ - Q\tilde{P} \equiv 0,$$

dove $\tilde{P}$ è il sistema $t\partial_t - t_A - \tilde{B}$ e $\tilde{B}$ è diagonale per grandi valori di $t|\xi|$

iv) Costruzione di una parametrice per $\tilde{P}$.

Esempio. Consideriamo il pdC per l'operatore di Eulero-Poisson-Darboux

$$P(t,x,\partial_t,\partial_x) = t(\partial_t^2 - \Delta) + \alpha(t,x)\partial_t + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(t,x)\partial_{x_j} + \gamma(t,x) \ ,$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in C^\infty(]-T,T[\times \Omega)$: $Pu = f$, $u|_{t=0} = g_o$.

In questo caso $I_P(x,\xi;\zeta) = \zeta + \alpha(0,x)$, sicché l'ipotesi (0.2) dice che $\alpha(0,x) \notin \{0,-1,-2,...\}$.

Nel seguito diamo un'idea dei singoli passi che compongono la costruzione.

1. RIDUZIONE AL PESO ZERO

Indichiamo un modo standard di ridurre il pdC (0.3) a un'equazione del tipo $\tilde{P}v = \tilde{f}$, con $\tilde{P}$ operatore di peso 0 (i.e. $k = m$). L'osservazione fondamentale è che $P(tv) = P^{\#}v$ con $P^{\#}$ di peso $m-(k+1)$. Infatti

$$P^{\#} = t^{k+1} P_m + t^{k-1} P^{\#}_{m-1} + \dots + P^{\#}_{m-k} + P^{\#}_{m-(k+1)} \quad \text{dove}$$

$$P^{\#}_{m-j} = t^{k+1-j} P_{m-j} + \sum_{h=0}^{m-j} t^{k+1-j} (h+1) \ a_{m-j+1,h} \ \partial_t^h$$

$$P^{\#}_{m-(k+1)} = \sum_{h=0}^{m-(k+1)} t^{k+1-(k+t)} (h+1) \ a_{m-k,\ h} \ \partial_t^h$$

E' facile vedere che $I_{\tilde{P}}(x,\xi;\zeta) = (\zeta-(k-m))\, I_P(x,\xi;\zeta)$, $\forall \zeta \in C$, $\forall (x,\xi) \in S^*\Omega$; dunque poiché $k < m$, la (0.2) è verificata. Consideriamo ora il PdC (0.3). Sia $w \in C^\infty(]-T,T[\,;\, E'(\Omega))$ tale che $\partial_t^j w|_{t=0} = g_j$, $j = 0,1,\dots, m-k-1$. Allora $u - w \in C^\infty(]-T,T[;\, E'(\Omega))$ e $\partial_t^j(u-w)|_{t=0} = 0$, $j = 0,1,\dots, m-k-1$. Dunque esiste $v \in C^\infty(]-T,T[;\, E'(\Omega))$ tale che $u-w = t^{m-k}v$. Basta allora risolvere $P(t^{m-k}v) = f - P\,w \in C^\infty(]-T,T[;\, E'(\Omega))$; ma $P(t^{m-k}v) = \tilde{P}\,v$, $\tilde{P}$ di peso 0 e soddisfacente le ipotesi i), ii), iii), iv).

D'ora in poi ragioneremo solo nel caso di peso 0.

Esempio. Il pdC per l'operatore di Eulero-Poisson-Darboux $Pu = f$, $u|_{t=0} = g$ diventa (se α,β,γ sono costanti)

$$\tilde{P}v = t^2(\partial_t^2 - \Delta)v + (\alpha+2)+\partial_t v + t\sum_{j=1}^{n}\beta_j\partial_{x_j}v + (\alpha+t\gamma)v = f_1\ , \tag{1.1}$$

dove $f_1 = f + t\Delta g - t\sum_{j=1}^{n}\beta_j\,\partial_{x_j}g - t\,\gamma g$

Inoltre $I_{\tilde{P}}(\zeta) = \zeta(\zeta-1) + (\alpha+2)\zeta + \alpha = (\zeta+1)(\zeta+\alpha)$

2. RISOLUZIONE A SISTEMA D'UNA EQUAZIONE DI PESO 0

Indicheremo con Λ un operatore pseudodifferenziale (opd) di ordine 1 e invertibile.

Sia $c \in R$ tale che

$$\lambda_j(0,x,\xi) \neq c\ ,\quad \forall (x,\xi) \in S^*\Omega,\ j = 1,\dots,m. \tag{2.1}$$

Se T è opportuno allora

(2.2) $\lambda_j(t,x,\xi) \neq c \qquad \forall (x,\xi) \in S^*\Omega, \quad \forall\, t \in]-T,T[\ , \ j = 1,\dots,m$

Poniamo

(2.3) $Z(x,D_x) = \sqrt{-1}\ \ c\ \Lambda$

Sia inoltre $\gamma \in C$. Si può provare che, posto

(2.4) $L = t(\partial_t - Z(x,D_x)) - \gamma\ ,$

si può scrivere

(2.5) $$P = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-j} t^{m-j-k} A^{(\gamma)}_{m-j-k,j}\ (t,x,D_x)\ L^k \quad ,$$

per certi opd $A^{\gamma}_{m-j-k,j} \in OPS^{m-j-k}_{cl}\ (\Omega)$, dipendenti in modo C^∞ da t e tali che

i) $A^{(\gamma)}_{o,o} \equiv 1$

ii) $\forall t \in]-T,T[\ , \ \forall (x,\xi) \in T^*\Omega\ \ 0$

$$\sum_{k=0}^{m} \sigma_{m-k}(A^{(\gamma)}_{m-k,o})(t,x,\xi)(\tau - \sigma_1(Z))^k = P_m(t,x,\tau,\xi)$$

iii) $\sum_{j=0}^{m} \sigma_o(A^{(\gamma)}_{o,j})(0,x,\xi)\ \zeta^{m-j} = I_p(x,\xi;\zeta+\gamma)$

<u>Esempio</u>. Poiché $(t\partial_t)^2 = L + tZ + \gamma$,
$(t\partial_t)^2 = L^2 + t^2Z^2 + 2t\gamma Z + 2(tZ + \gamma)L + tz + \gamma^2$, si ha che l'operatore

(1.1) si scrive nella forma:

$$(2.6) \qquad \tilde{P} = L^2 - t^2((\Delta - Z^2)\Lambda^{-2})\Lambda^2 + 2tZL + (2\gamma + \alpha + 1)L$$

$$+t \quad (\alpha+2+2\gamma)Z + (\sum_{j=1}^{n} \beta_j \partial_{x_j} \Lambda^{-1})\Lambda \quad + (\alpha+1)\gamma + \gamma^2 + \alpha + t\gamma \quad .$$

Inoltre il polinomio scritto in iii) è

$$\zeta^2 + (2\gamma + \alpha + 1)\zeta + (\alpha + 1)\gamma + \gamma^2 + \alpha = (\zeta + \gamma + 1)(\zeta + \gamma + \alpha).$$

Supponiamo ora $\gamma \notin Z$. E' possibile provare che, se si pone,

$$\begin{cases} u_1^{(1)} = (t\Lambda)^{m-1} u \\ u_2^{(1)} = (t\Lambda)^{m-2} Lu \\ u_m^{(1)} = L^{m-1} u \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} u_1^{(h)} = (t\Lambda)^{m-h-1} \\ u_2^{(h)} = (t\Lambda)^{m-h-2} L^2 u \qquad h=2,\dots,m-1 \\ u_{m-h}^{(h)} = L^{m-h} u \\ u_{m-h+1}^{(h)} = (t\Lambda)^{m-h-1} u \end{cases}$$

e $\vec{u} = (u_1^{(1)},\dots,u_m^{(1)},u_1^{(2)},\dots,u_{m-1}^{(2)},\dots,u_1^{(h)},\dots,u_{m-h+1}^{(h)},\dots,u_1^{(m-1)},u_2^{(m-1)})$

l'equazione $Pu = f$ viene tradotta in un sistema *equivalente* $N \times N$ del tipo

$$(2.8) \qquad t\partial_t \vec{u} = tA(t,x,D_x)\vec{u} + B(t,x,D_x)\vec{u} + \vec{f} \; ,$$

dove A è una matrice $N \times N$ di opd di ordine 1 del tipo

$$A = \begin{bmatrix} A' & * \\ 0 & I_{N-m} Z \end{bmatrix} \; ,$$ A' ha gli autovalori conincidenti con le radici di P_m.

B è una matrice N x N di opd di ordine 0 e si ha che

$$\det(\lambda I_N - \sigma_o(B))(0,x,\xi) = I_p(x,\xi;\lambda)\, q(\lambda-\gamma)$$

con $q(\zeta) = (\zeta-(m-1))(\zeta-(m-2)) \prod_{j=3}^{m-1} (\zeta-(m-j))^j$

Osserviamo esplicitamente che la scelta fatta di γ assicura che la condizione (0.2) è verificata. Ancora: la condizione (0.2) garantisce che il sistema (2.8) è equivalente alla equazione di partenza.

Esempio. Ponendo $u_1 = t\Lambda u$, $u_2 = Lu$, $u_3 = u$ nell'equazione di Eulero-Poisson-Darboux a peso 0 si ha:

$$
\begin{aligned}
Lu_1 &= t\Lambda u_2 + u_1 \\
Lu_2 &= f_1 + t((\Delta - Z^2)\Lambda^{-2})\Lambda u_1 - 2tZu_2 - (2\gamma+\alpha+1)u_2 \\
&\quad - \left[(\alpha+2+2\gamma)\, Z\Lambda^{-1} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \partial_{x_j} \Lambda^{-1} \right] u_1 \\
&\quad - \big((\alpha+1)\gamma + \gamma^2 + \alpha + t\gamma\big) u_3 \qquad (2.9) \\
Lu_3 &= u_2
\end{aligned}
$$

che dà il sistema

$$t\partial_t\vec{u} = t\begin{bmatrix} Z & \Lambda & 0 \\ (\Lambda^2-Z^2)\Lambda^{-1} & -Z & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{bmatrix}\vec{u} +$$

$$+\begin{bmatrix} 1+\gamma & 0 & 0 \\ -(\alpha+2+2\gamma)Z\Lambda^{-1} - \sum_{j=1}^{n} \beta_j\partial x_j\Lambda^{-1} & -(\gamma+\alpha+1) & -(\alpha+1)\gamma-\gamma^2-\alpha-t\gamma \\ 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}\vec{u}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che la matrice di ordine 1 ha autovalori Z, $\pm i|\xi|$, mentre la matrice di ordine 0 ha autovalori $1+\gamma$, -1, $-\alpha$; per la scelta fatta di γ ($\notin Z$) la condizione (0.2) è soddisfatta.

3. COSTRUZIONE DI UN OPERATORE DI DISACCOPPIAMENTO

Introduciamo ora alcuni classi di simboli per opd. Indichiamo $\Omega_T =]-T,T[\times \Omega$ e $S^{m,k}(\Omega_T) = \{a(t,x,\xi) \in C^\infty(\Omega_T \times R^n_\xi) |$

$$|\partial_t^j \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(t,x,\xi)| \leq C_{\Omega'_T}, |\xi|^{m-|\beta|}(|t| + \frac{1}{|\xi|})^{k-j}, \forall j, \alpha, \beta,$$

$\forall (t,x) \in \Omega'_T \subset\subset \Omega_T$, $\forall \xi$, $|\xi| > 1\}$

Poniamo $S^{-\infty,k} = \bigcap_m S^{m,k}$, $S^{m,+\infty} = \bigcap_k S^{m,k}$.

Inoltre diremo che un operatore $E: C^\infty(]-T,T[; C_0^\infty(\Omega)) \to C^\infty(\Omega_T)$ è parzialmente regolarizzante se esiste $r(t,x,y) \in C^\infty((\Omega \times \Omega)_T)$ tale che

$$(3.1) \qquad (Rf)(t,x) = \int_\Omega r(t,x,y)\, f(t,y)dy , \quad f \in C^\infty(]-T,T[; C_0^\infty(\Omega)),$$

$OPS^{m,k}(\Omega_T)$ indicherà la classe degli operatori definiti da simboli in $S^{m,k}(\Omega_T)$ modulo parzialmente regolarizzanti.

Per la costruzione del disaccoppiatore per il sistema P occorre precisare nelle classi $S^{m,k}$ il comportamento asintotico per grandi valori di $t|\xi|$; essenzialmente per questa ragione si è indotti a introdurre delle sottoclassi di $S^{m,k}$. Nel seguito indichiamo con ξ' il vettore $\xi/|\xi|$, $\xi \neq 0$. Definiamo

$$S^k(\Omega) = \{\phi(x,\xi';z) \quad C^\infty(\Omega_x \times S^{n-1}_{\xi'} \times R_z) | \phi \sim \sum_{j \geq 0} \phi_{-j}(x,\xi')\, z^{k-j}, \quad z \to \infty ,$$

con $\phi_{-j}(x,\xi') \in C^\infty(\Omega_x \times S^{n-1}_{\xi'})\}$

Il simbolo $\sim$ significa che $\forall \alpha \in Z^n_+$, $\forall p$, qualunque siano $\theta_1,\dots,\theta_q$ campi vettoriali C^∞ in S^{n-1}, si ha

$$(3.2) \qquad |\partial_z^p \partial_x^\alpha \theta_1 \ldots \theta_q (\phi - \sum_{j<M} \phi_{-j} z^{k-j})| \leq C\, |z|^{k-M-p} \;, \quad |z| > 1, \quad \forall (x,\xi')$$

Definiamo ancora

$$\Sigma^{m,k}(\Omega_T) = \{a(t,x,\xi) \in C^\infty(\Omega_T \times R^n_\xi) \mid \exists\, \hat{a}(x,\xi';z) \in S^k(\Omega) \text{ per cui}$$

$$a(t,x,\xi) = |\xi|^{m-k}\, \hat{a}(x, \frac{\xi}{|\xi|} \,;\, t|\xi|)\}$$

Ovviamente $\Sigma^{m,k} \subset S^{m,k}$.

Indichiamo con $\hat{\Sigma}^{m,k}(\Omega_T)$ la classe di simboli $a \in S^{m,k}(\Omega_T)$ per cui esistono $a_j \in \Sigma^{m,k+j}(\Omega_T)$, $j \geq 0$, tali che

$$a - \sum_{j<M} a_j \in S^{m,k+M}(\Omega_T).$$

$OP\Sigma^{m,k}$ è definito modulo parzialmente regolarizzante dai simboli di $\Sigma^{m,k}$, $OP\hat{\Sigma}^{m,k}$ è definito dai simboli di $\hat{\Sigma}^{m,k}$ modulo parzialmente regolarizzanti e modulo $OPS^{m,\infty}$.

Inoltre per la costruzione della parametrice vengono naturalmente utilizzate versioni di tipo Hardy di $\Sigma^{m,k}$ e $\hat{\Sigma}^{m,k}$. Definiamo così:

$$HS^k(\Omega) = \{\psi \in C^\infty(]0,1] \times \Omega \times S^{n-1}_{\xi'} \times R_z) \mid \sup_{\substack{\rho \in]0,1] \\ x \in \Omega' \subset\subset \Omega \\ \xi' \in S^{n-1}}} |\rho^\varepsilon (\rho\partial_\rho)^j \partial_z^P \partial_x^\alpha \theta_1, \ldots \theta_q \psi| \leq$$

$$\leq \text{Cost } (1+|z|)^{k-P} \;, \quad \forall z \in R, \ \forall \varepsilon > 0\}$$

$$HS^{m,k}(\Omega) = \{a \in C^\infty(]0,1] \times \Omega_T \times R^n_\xi) \mid \sup_{\rho\ ]0,1} |\rho^\varepsilon (\rho\partial_\rho)^P \partial_t^j \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a| \leq$$

$$\leq C\, |\xi|^{m-|\beta|} (|t| + \frac{1}{|\xi|})^{k-j} \;, \quad \forall \varepsilon > 0\}$$

In modo del tutto analogo si definiscono le classi $H\Sigma^{m,k}(\Omega_T)$ e $H\hat{\Sigma}^{m,k}(\Omega_T)$.

Ancora diciamo che $R: C^\infty(]-T,T[; C_0^\infty(\Omega)) \to C^\infty(\Omega_T)$ è parzialmente regolarizzante di tipo Hardy (prH) se esiste $r(\rho,t,x,y) \in C^\infty(]0,1] \times (\Omega \times \Omega)_T)$ tale che $p,j,\alpha,\beta,\ \varepsilon > 0$,

$$\sup_{\substack{(x,y)\in \Omega' \times \Omega' \subset\subset \Omega \times \Omega \\ |t| \leq T' < T \\ \rho \in]0,1]}} |\rho^\varepsilon (\rho\partial_\rho)^j \partial_t^p \partial_x^\alpha \partial_y^\beta r(\rho,t,x,y)| \leq C \quad \text{e}$$

$$(Rf)(t,x) = \int_0^1 \int_\Omega r(\rho,t,x,y) f(\rho t,y)\, d\rho\, dy,$$

$f \in C^\infty(]-T, T[; C_0^\infty(\Omega))$.

$OPHS^{m,k}$ è definito ora modulo prH, così come pure $OPH\Sigma^{m,k}$.
$OPH\Sigma^{m,k}$ è definito modulo prH e $OPHS^{m,\infty}$.

Ciò premesso consideriamo un sistema $P = I_N t\partial_t - tA(t,x,D_x) - B(t,x,D_x)$, dove possiamo supporre A diagonale a blocchi con autovalori reali ($A \in OPS^1_{cl}$) e $B \in OPS^0_{cl}$, entrambi dipendenti in modo C^∞ da t. Si può provare il seguente

<u>Teorema</u>. Esiste $Q \in OP\hat{\Sigma}^{0,0}(\Omega_T)$, Q ellittico (nel senso che il simbolo di Q mod $\hat{\Sigma}^{0,1}$ è invertibile) ed esiste $\tilde{B} \in OP\hat{\Sigma}^{0,0}(\Omega_T)$ che gode delle seguenti proprietà:

$$\tilde{B}(t,x,\xi) \sim \sum_{j\geq 0} \hat{\tilde{b}}_j,\ \tilde{b}_j \in \Sigma^{0,j},\ \tilde{b}_j(t,x,\xi) = |\xi|^{-j}\ .$$

- $\hat{\tilde{b}}_j(x, \frac{\xi}{|\xi|}; t|\xi|)$, $\hat{\tilde{b}}_j \in S^j(\Omega)$ tali che se $\hat{\tilde{b}}_j \sim \sum \hat{\tilde{b}}_{j,-k}\ z^{j-k}$

si ha

i) $\hat{\tilde{b}}_j(x,\xi';z) = \hat{\hat{b}}_j(x,\xi';z)$ se $|z|$ è abbastanza piccolo ($\hat{b}_j$ è ottenuto interpretando B come operatore in $OP\Sigma^{o,o}$)

ii) $\tilde{b}_j$ e $\hat{\tilde{B}}(t,x,\xi)$ sono diagonali a blocchi per $|z|$ abbastanza grande

iii) $\mathrm{diag}(\tilde{b}_{o,o}(x,\xi')) = \mathrm{diag}(\hat{b}_o(x,\xi'))$.

Inoltre si ha, se $\tilde{P} = t\partial_t - tA - \tilde{B}$

$$PQ - Q\tilde{P} \equiv 0 \quad (\equiv 0 \Leftrightarrow \; = 0 \bmod pr).$$

La dimostrazione è abbastanza lunga e tecnica e non può essere riportata qui; essenzialmente consiste in una generalizzazione del metodo con cui si ricava lo sviluppo asintotico per le soluzioni di sistemi con singolarità regolari (cfr. per es. Wasów [5]). Essenzialmente, operando in modo formale si cerca un simbolo $Q \sim \sum_{j\geq 0} q_j(t,x,\xi)$, $q_j \in \Sigma^{o,j}$. L'equazione che permette di determinare q_o è del tipo seguente:

$$I_N t\partial_t q_o - t\,[a(0,x,\xi),\, q_o] - b(0,x,\xi)\, q_o - q_o\, b_o(t,x,\xi) = 0$$

che, ponendo $z = t|\xi|$, può essere tradotta nella seguente:

$$(3.3) \qquad I_N\, z\partial_z\, \hat{q}_o - z\;\; a(0,x,\xi'),\hat{q}_o \;\; - b(0,x,\xi')\hat{q}_o - \tilde{q}_o\, \hat{b}_o(x,\xi';z) = 0.$$

La (3.3) viene risolta formalmente per serie ($\hat{q}_o \in S^o(\Omega)$): si pone $\hat{q}_o \sim \sum q_{o,-j}(x,\xi')\, z^{-j}$; eguagliando le potenze di z si ha (ciò corrisponde a calcolare i vari termini dello sviluppo asintotico di $\hat{q}_o$ in $S^o(\Omega)$):

$$\hat{q}_{o,o}\, a - a\hat{q}_{o,o} = 0$$

che è soddisfatta ponendo $\hat{q}_{o,o} = I_N$. Ancora per $\hat{q}_{0,-1}$ si ha:

$$[\hat{q}_{o,-1} , a] = \hat{b} - b_o \tag{3.4}$$

Se $b = (b_{hk})_{n,k=1,\dots,\nu}$ è la matrice a blocchi di b, si cerca $\hat{q}_{o,-1}$ nella forma $\hat{q}_{o,-1} = (\hat{q}_{o,-1}^{(h,k)})_{h,k=1,\dots,\nu}$, con $\hat{q}_{o,-1}^{(h,k)} = 0$ se $h = k$.

Poniamo

$$\hat{b}_o = \begin{bmatrix} b_{11} & & 0 \\ & b_{22} & \\ & & \\ 0 & & b_{\nu\nu} \end{bmatrix} ,$$

allora

$$b-\hat{b}_o = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & & \\ * & & 0 \end{bmatrix}$$

Le equazioni per $\hat{q}_{o,-1}$ sono allora del tipo

$$\sqrt{-1}\ (\lambda_k - \lambda_h)\, \hat{q}_{o,-1}^{(h,k)} = b_{hk} \quad , \ h,k = 1,\dots,\nu,\ h \neq k, \tag{3.5}$$

che possano essere risolte grazie all'ipotesi iii) di pag. 3 (stretta iperbolicità di P_m). Tale procedimento può essere iterato e permette di determinare lo sviluppo asintotico di $\hat{q}_0$. Gli altri termini, i.e. $\hat{q}_j$, richiedono un trattamento lievemente differente.

4. COSTRUZIONE DI UNA PARAMETRICE DESTRA (SINISTRA)

Consideriamo l'operatore

$$\tilde{P} \doteq I_N t\partial_t - tA(t,x,D_x) - \tilde{B}(t,x,D_x), \tag{4.1}$$

con A diagonale a blocchi e $\tilde{B} \in OP\Sigma^{0,0}$. Faremo la seguente ipotesi, che, in vista della condizione (0.2) non è restrittiva:

$$\mathrm{Re}\ \hat{\tilde{b}}_0(x,\xi';z) \leqq -c\ I_N \quad , \quad c > 1, \tag{4.2}$$

$$\forall (x,\xi') \in \Omega \times S^{n-1} \quad , \quad \forall z \in R.$$

Definiamo le fasi che entrano nella costruzione della parametrice a destra: siano $\phi_j(t,s,x,\xi)$ $C^\infty(]-T,T[\times]-T,T[\times \Omega \times (R^n_\xi \setminus 0))$ definite da

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi i}{\partial t}(t,s,x,\xi) = \lambda_j(t,x,d_x\phi_j(t,s,x,\xi)) \\ \phi_j(s,s,x,\xi) = \langle x,\xi\rangle \quad , \quad \xi \neq 0 \qquad j = 1,\dots,\nu \end{cases} \tag{4.3}$$

Se $\rho \in [0,1]$, le fasi che ci interessano sono allora definite da

$$(4.4) \qquad \psi_j(t,\rho,x,\xi) = \phi_j(t,\rho t, x,\xi) \quad , \quad j = 1,\dots,\nu.$$

Poniamo

$$e^{i\psi(t,\rho,x,\xi)} = \begin{bmatrix} e^{i\psi_1(t,\rho,x,\xi)} I_{N_1} & & 0 \\ & e^{i\psi_2(t,\rho,x,\xi)} I_{N_2} & \\ 0 & & e^{i\psi_\nu(t,\rho,x,\xi)} I_{N_\nu} \end{bmatrix}$$

Se $f = (f_1,\dots,f_N) \in C^\infty(]-T,T[;\, C_0^\infty(\Omega))^N$, cerchiamo la parametrice nella forma

$$(4.5) \qquad E(h;f) = \int_0^1\!\!\int e^{i\psi(t,\rho,x,\xi)}\, h(t,\rho,x,\xi)\, \hat{f}(t\rho,\xi)\, d\rho\, d\xi,$$

dove $h \in H\hat{\Sigma}^{o,o}(\Omega_T)$, $h \sim \sum_{j\geq 0} h_j$ è tale che risulti

$$(4.6) \qquad \tilde{P}\, E(h,\cdot) - I_N :\ C^\infty(]-T,T[;\, E'(\Omega))^N \to C^\infty(]-T,T[\times \Omega)^N.$$

Si ha

$$\begin{cases} \tilde{P}\, E(h;f) = f + E(I_N(t\partial_t - \rho d\rho - 1)h;\, f) - E(q';\, f) - E(p;\, f), \\ \text{purché} \\ h(\rho,t,x,\xi)|_{\rho=1} = I_N\ , \end{cases}$$

e dove $q' \in H\hat{\Sigma}^{o,1}(\Omega_T)$, e si è posto (con notazione a blocchi $p =$ $= (p^{(\sigma,\sigma')})_{1\leq\sigma,\sigma'\leq\nu})$

$$(4.8)\qquad p^{(\sigma,\sigma')} = e^{-i\psi_\sigma}\,\tilde{B}^{(\sigma,\sigma)}\left[e^{i\psi_\sigma}\,h^{(\sigma,\sigma')}\right] +$$

$$+\sum_{\substack{\sigma''=1\\ \sigma''\neq\sigma}}^{\nu} e^{i(\psi_{\sigma''}-\psi_\sigma)}\,\{e^{-i\psi_{\sigma''}}\,\tilde{B}^{(\sigma,\sigma'')}\left[e^{i\psi_{\sigma''}}\,h^{(\sigma'',\sigma')}\right]\}.$$

L'osservazione cruciale è la seguente: poiché $\tilde{B}$ è diagonale a blocchi per $t|\xi| \geqq \gamma$, $\gamma > 0$, opportuno, se si denota con $\chi(x,t|\xi|)$ una funzione $\equiv 0$ se $t|\xi| \geqq \gamma$, $\forall\, x \in \Omega' \subset\subset \Omega$; si ha

$$(4.9)\qquad p^{\sigma,\sigma'} = e^{-i\psi_\sigma}\,\tilde{B}^{(\sigma,\sigma)}\,e^{i\psi_\sigma}\,h^{(\sigma,\sigma')} +$$

$$+\sum_{\substack{\sigma''=1\\ \sigma''\neq\sigma}}^{\nu} e^{i(\psi_{\sigma''}-\psi_\sigma)}\,\{e^{-i\psi_{\sigma''}}\,(\chi\,\tilde{B}^{(\sigma,\sigma'')})(t,x,D_x)\,e^{i\psi_{\sigma''}}\,h^{(\sigma'',\sigma')}\,\}$$

Al primo termine in (4.9) si applica il teorema di Hörmander (adattato alle classi Σ); per quanto riguarda il secondo termine si osserva che, mod $HS^{-\infty,0}(\Omega_T)$, esso è un simbolo di $H\hat{\Sigma}^{0,0}(\Omega_T)$: infatti il fattore di fase $e^{i(\psi_{\sigma''}-\psi_\sigma)}$, a causa della presenza della funzione cut-off χ, può essere interpretato come un simbolo in $H\hat{\Sigma}^{0,0}$.

Usando le notazioni:

$$\tilde{b}_o = \tilde{b}_o' + \tilde{b}_o'' \quad , \quad \text{con } \tilde{b}_o' = \begin{bmatrix} \tilde{b}_o^{(1,1)} & 0 \\ 0 & \tilde{b}_o^{(\nu,\nu)} \end{bmatrix} , \quad \tilde{b}_o'' = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{b}_o^{(\sigma,\sigma')} \\ \tilde{b}_o^{(\sigma',\sigma)} & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\Lambda^{\pm}(x,\xi',\rho,z) = \begin{bmatrix} e^{\pm iz(1-\rho)\lambda_1(0,x,\xi')} I_{N_1} & & 0 \\ & e^{\pm iz(1-\rho)\lambda_2(0,x,\xi')} I_{N_2} & \\ 0 & & e^{\pm iz(1-\rho)\lambda_\nu(0,x,\xi')} I_{N_\nu} \end{bmatrix},$$

da (4.7) si ottiene la seguente equazione di trasporto per h_o:

$$(4.10) \qquad \begin{cases} I_N\,(z\partial_z - \rho\partial_\rho)\hat{h}_o - \left[I_N + \hat{\tilde{b}}'_o(x,\xi';z) + \Lambda^- \times \hat{\tilde{b}}''_o\,\Lambda^+\right]\hat{h}_o = 0 \\ \hat{h}_o\big|_{\rho=1} = I_N . \end{cases}$$

La risoluzione di (4.10) e l'iterazione di questo procedimento forniscono l'ampiezza cercata h. Si giunge così a provare il seguente

<u>Teorema</u>. Sia dato $\tilde{P}$ come in (4.1), soddisfacente l'ipotesi (4.2). Allora esiste $h \in H\hat{\Sigma}^{0,0}(\Omega_T)$ tale che

$$\tilde{P}\,E(h,f) = f + Rf\ , \quad \forall f \in C^\infty(]-T,T[;\ C_o^\infty(\Omega))^N,$$

dove R è un opportuno operatore parzialmente regolarizzante di tipo Hardy. Un risultato analogo si ha per la parametrice a sinistra.

BIBLIOGRAFIA

[1] M.S. BAOUENDI, C. GOULAOUIC: Cauchy problem with characteristic initial hypersurface, Comm. Pure Appl. Math., 26 (1973), 455-475.

[2] N. HANGES: Parametrices and local solvability for a class of singular hyperbolic operators, Comm. P.D.E. 3 (2) (1978), 105-152.

[3] H. TAHARA: Fuchsian type equations and fuchsian hyperbolic equations, Japan. J. Math. 5 (1979), 245-347.

[4] A. BOVE, J.E. LEWIS, C. PARENTI: Lavoro in preparazione.

[5] W. WASOW: A symptotic expansions for ordinary differential equations: R. Krieger publ. co., Huntington, N.Y., 1976.